Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

Mathématiques, groupement B

Session 2022 • Code sujet : **22MATGRB2** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **1,5 en Conception et industrialisation en microtechniques ; 2 en Électrotechnique**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. Modélisation et étude de la vitesse de freinage d'un chariot (12 questions) **Page 3**

2. Transformées de Laplace d'un système électrique entrée-sortie (9 questions) **Page 7**

3. Ce qu'il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ) (Synthèse & Q&A Examen) **Page 11**

Sujet officiel (PDF) : https://btsmte.fr/assets/annales/bts-mte/E2 - Mathématiques/2022/BTS MTE - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 2-Sujet.pdf

1. Modélisation et étude de la vitesse de freinage d'un chariot

Un chariot de fête foraine est propulsé à 20 m·s⁻¹ sur un axe horizontal, puis ralenti par un système de freinage. Sa vitesse est étudiée à l'aide d'une équation différentielle, de limites, de variations, d'une intégrale et d'un développement limité.

Partie A - Résolution d'une équation différentielle

Question 1.a. Résoudre sur l'intervalle considéré l'équation différentielle homogène y' + 0,8y = 0.

On reconnaît l'équation différentielle homogène $y' + ay = 0$, avec $a = 0,8$. La formule du sujet donne les solutions $y(t) = ke^{-at}$, où k est une constante réelle. En remplaçant a par $0,8$, on obtient toutes les solutions sur l'intervalle $[0; +\infty[$. Elles sont définies et dérivables sur cet intervalle.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Les solutions sont $y(t) = ke^{-0,8t}$, où k est une constante réelle.

Question 1.b. Soit g définie sur [0 ; +∞[par g(t) = 5. Vérifier que g est une solution de l'équation différentielle y' + 0,8y = 4.

La fonction g est constante, donc sa dérivée est nulle : $g'(t) = 0$. En substituant $g(t) = 5$ dans le membre de gauche de l'équation, on trouve $g'(t) + 0,8g(t) = 0 + 0,8 \times 5 = 4$. Cette égalité est vraie pour tout $t \in [0; +\infty[$. Le membre de gauche vaut donc bien le membre de droite, ce qui vérifie que g est une solution de l'équation différentielle.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> La fonction constante $g(t) = 5$ vérifie bien l'équation différentielle $y' + 0,8y = 4$.

Question 1.c. Déduire des résultats précédents l'ensemble des solutions de l'équation différentielle y' + 0,8y = 4.

On connaît une solution particulière de l'équation complète : $g(t) = 5$. À toute solution particulière, on ajoute les solutions de l'équation homogène associée $y' + 0,8y = 0$. D'après la question précédente, ces solutions sont de la forme $ke^{-0,8t}$, avec k réel. On obtient ainsi l'ensemble des solutions de l'équation complète, définies sur $[0; +\infty[$.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Sur $[0; +\infty[$, les solutions sont $y(t) = ke^{-0,8t} + 5$, avec $k \in \mathbb{R}$.

Question 2. Déterminer la solution de l'équation différentielle y' + 0,8y = 4 qui vérifie la condition initiale f(0) = 20.

La solution générale est $f(t) = ke^{-0,8t} + 5$. La condition initiale impose $f(0) = 20$. Comme $e^0 = 1$, on a $k + 5 = 20$, donc $k = 15$. En remplaçant la constante dans la solution générale, on obtient la fonction correspondant à la vitesse du chariot. Cette expression vérifie la condition initiale et l'équation différentielle.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> La solution vérifiant $f(0) = 20$ est $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$.

Partie B - Étude de la fonction f

Question 1.a. Démontrer que la limite de f(t) lorsque t tend vers +∞ est égale à 5.

Pour tout $t \geq 0$, la fonction est $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$. Lorsque t tend vers $+\infty$, l'exposant $-0,8t$ tend vers $-\infty$, donc $e^{-0,8t}$ tend vers zéro. Le produit $15e^{-0,8t}$ tend également vers zéro. Par addition avec le terme constant, la limite de $f(t)$ est donc égale à 5.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> La limite de la vitesse lorsque t tend vers $+\infty$ est 5.

Question 1.b. Déduire de cette limite une équation de l'asymptote à la courbe représentative de f.

La courbe admet une asymptote horizontale à droite lorsque la fonction possède une limite finie en $+\infty$. Ici, la limite trouvée à la question précédente vaut 5. L'ordonnée de l'asymptote est donc égale à cette limite. On exprime son équation dans le repère de la courbe, avec t en abscisse et $f(t)$ en ordonnée.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> L'asymptote horizontale à la courbe en $+\infty$ a pour équation $y = 5$.

Question 2. Sachant que f'(t) = -12e$^{-0,8t}$ sur [0 ; +∞[, dresser le tableau de variation de f sur cet intervalle.

Pour tout $t \geq 0$, l'exponentielle est strictement positive. Ainsi, $f'(t) = -12e^{-0,8t} < 0$, et la fonction est strictement décroissante. De plus, $f(0) = 20$ et $\lim_{t \to +\infty} f(t) = 5$. Le tableau résume son sens de variation et les valeurs aux bornes.

t	**0**	$+\infty$
$f'(t)$	$-$	
$f(t)$	20	$\searrow 5$

✓ RÉPONSE À RETENIR

La fonction f est strictement décroissante de 20 vers 5 sur $[0;+\infty[$.

Question 3. Déterminer si le système de freinage permet au chariot de s'arrêter.

Pour que le chariot s'arrête, sa vitesse doit atteindre zéro. Or, pour tout $t \geq 0$, on a $e^{-0,8t} > 0$, donc $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5 > 5$. La vitesse reste ainsi supérieure à 5 à tout instant fini et tend vers 5 lorsque le temps augmente. Le modèle décrit un ralentissement, mais pas un arrêt du chariot.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Non, le chariot ne s'arrête pas : sa vitesse reste positive et tend vers $5\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$.

Question 4.a. Vérifier que F(t) = -18,75e$^{-0,8t}$ + 5t est une primitive de f sur [0 ; +∞[.

On dérive $F(t) = -18,75e^{-0,8t} + 5t$. Par dérivation de l'exponentielle composée, $F'(t) = (-18,75)(-0,8)e^{-0,8t} + 5$. Le produit des coefficients vaut 15, d'où $F'(t) = 15e^{-0,8t} + 5$. Cette expression est égale à $f(t)$ sur $[0;+\infty[$, donc F est bien une primitive de f.

✓ RÉPONSE À RETENIR

La dérivée est $F'(t) = 15e^{-0,8t} + 5 = f(t)$, donc F est une primitive.

Question 4.b. À l'aide de l'intégrale de la vitesse, calculer la valeur exacte de la distance parcourue entre $t_0 = 0$ et $t_1 = 1$, puis donner une valeur arrondie au centimètre.

La distance parcourue entre 0 et 1 seconde est $d = \int_0^1 f(t)\,dt = F(1) - F(0)$. En utilisant la primitive donnée, on obtient $d = (-18,75e^{-0,8} + 5) - (-18,75) = 23,75 - 18,75e^{-0,8}$. Cette valeur exacte, en mètres, vaut environ $15,3251$ m. L'arrondi au centimètre est donc $15,33$ m.

✓ RÉPONSE À RETENIR

La distance parcourue est exactement $23,75 - 18,75e^{-0,8}$ m, soit $15,33$ m au centimètre près.

Partie C - Étude locale

Question 1. Choisir et recopier l'unique proposition donnant le développement limité de f à l'ordre 2 au voisinage de zéro. Aucune justification n'est demandée ; une réponse fausse, multiple ou absente ne rapporte ni n'enlève de point.

Le logiciel affiche la partie régulière $20 - 12t + \frac{24}{5}t^2$. Pour un développement limité à l'ordre 2, le reste doit s'écrire $t^2\varepsilon(t)$, avec $\varepsilon(t) \to 0$ lorsque $t \to 0$. Il faut donc retenir la troisième proposition du tableau, qui conserve les trois termes affichés et présente le reste sous la forme attendue. La première proposition ne place pas le reste à l'ordre 2.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> La troisième proposition est correcte : $f(t) = 20 - 12t + \frac{24}{5}t^2 + t^2\varepsilon(t)$, avec $\varepsilon(t) \to 0$.

Question 2. Donner une équation de la tangente à la courbe C au point d'abscisse 0.

L'équation de la tangente en l'abscisse 0 est $y = f(0) + f'(0)(t - 0)$. D'après l'énoncé, $f(0) = 20$, et la dérivée donnée donne $f'(0) = -12e^0 = -12$. La tangente passe donc par le point $(0; 20)$ et son coefficient directeur vaut -12. En reportant ces valeurs dans l'équation, on obtient son équation réduite.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> La tangente à la courbe au point d'abscisse 0 a pour équation $y = 20 - 12t$.

2. Transformées de Laplace d'un système électrique entrée-sortie

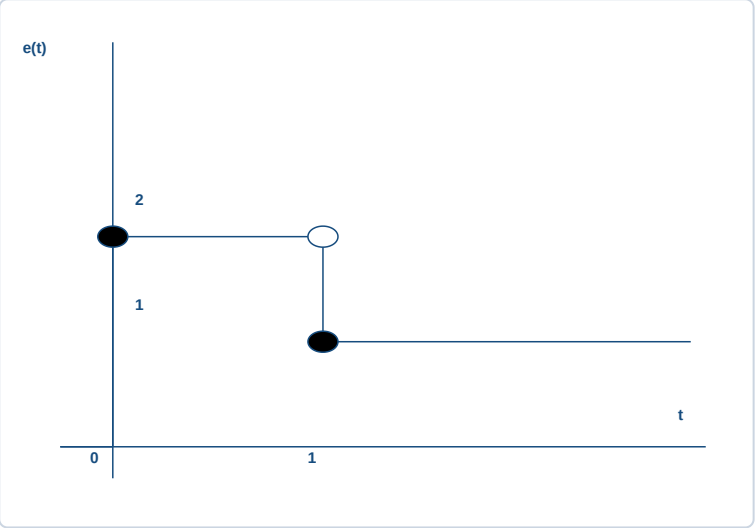
Un système électrique causal reçoit le signal e(t) = 2U(t) - U(t - 1) et sa fonction de transfert est H(p) = 1/(p + 1). Les questions portent sur le tracé et la transformée de Laplace du signal d'entrée, puis sur la détermination et l'étude du signal de sortie.

Partie A - Signal d'entrée

Question 1. Sur le document-réponse à rendre avec la copie, tracer la courbe représentative de la fonction e(t).

Le signal est nul pour $t < 0$. À $t = 0$, il vaut 2. Il reste égal à 2 jusqu'à l'instant 1 exclu, puis vaut 1 à partir de $t = 1$.

Signal d'entrée e(t)



✓ RÉPONSE À RETENIR

$e(t) = 0$ si $t < 0$, $e(t) = 2$ si $0 \leq t < 1$, et $e(t) = 1$ si $t \geq 1$.

Question 2. Déterminer la transformée de Laplace E(p) du signal d'entrée.

Par linéarité, $\mathcal{L}\{2U(t)\} = 2/p$. Le décalage d'une unité donne $\mathcal{L}\{U(t-1)\} = e^{-p}/p$. On soustrait ces deux transformées.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$$E(p) = \frac{2}{p} - \frac{e^{-p}}{p}.$$

Partie B - Signal de sortie

Question 1. Démontrer que S(p) = 2/[p(p + 1)] - e⁻ᵖ/[p(p + 1)].

La relation entrée-sortie donne $S(p) = H(p)E(p)$. En substituant les expressions obtenues pour $H(p)$ et $E(p)$, puis en distribuant le facteur $1/(p+1)$, on trouve :

$$S(p) = \frac{1}{p+1}\left(\frac{2}{p} - \frac{e^{-p}}{p}\right) = \frac{2}{p(p+1)} - \frac{e^{-p}}{p(p+1)}.$$

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $$S(p) = \frac{2}{p(p+1)} - \frac{e^{-p}}{p(p+1)}.$$

Question 2. Vérifier que 1/[p(p + 1)] = 1/p - 1/(p + 1).

En mettant les deux fractions au même dénominateur, le numérateur obtenu est $(p+1) - p = 1$. L'égalité est donc vérifiée :

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1} = \frac{(p+1) - p}{p(p+1)} = \frac{1}{p(p+1)}.$$

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $$\frac{1}{p(p+1)} = \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}.$$

Question 3. Donner les transformées de Laplace inverses de 1/p, de 1/(p + 1), de e⁻ᵖ/p et de e⁻ᵖ/(p + 1), en utilisant le formulaire.

Les deux premières inversions se lisent dans le formulaire. Pour les deux autres, on applique le décalage temporel d'une unité.

Transformée	Transformée inverse
$1/p$	$U(t)$
$1/(p+1)$	$e^{-t}U(t)$
e^{-p}/p	$U(t-1)$
$e^{-p}/(p+1)$	$e^{-(t-1)}U(t-1)$

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Dans l'ordre : $U(t)$, $e^{-t}U(t)$, $U(t-1)$, $e^{-(t-1)}U(t-1)$.

Question 4. Déduire l'expression de s(t) sur l'intervalle [0 ; 1[.

La décomposition en éléments simples donne $S(p) = 2(1/p - 1/(p+1)) - e^{-p}(1/p - 1/(p+1))$. Pour $0 \leq t < 1$, le terme retardé est nul et $U(t) = 1$. L'inversion donne alors :

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Pour $0 \leq t < 1$, $s(t) = 2(1 - e^{-t})$.

Question 5.a. Sachant que s(t) = (e - 2)e^{-t} + 1 sur [1 ; +∞[, calculer s(1), d'abord sous forme exacte puis à une valeur approchée au dixième.

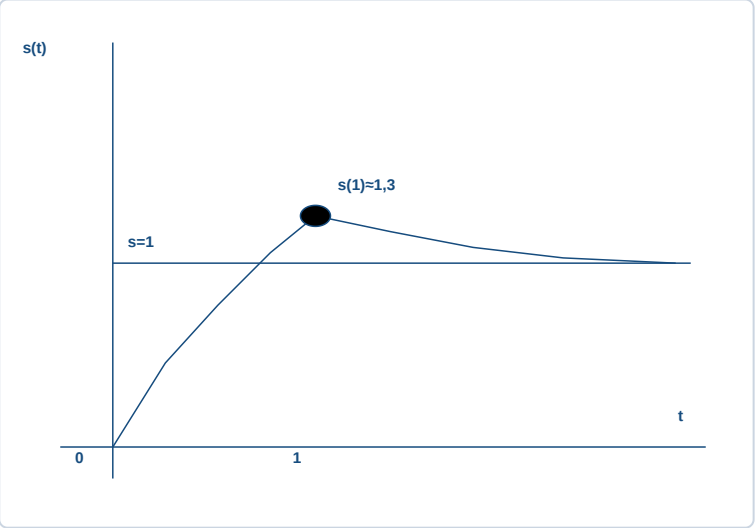
En substituant $t = 1$ dans l'expression valable pour $t \geq 1$: $s(1) = (e-2)e^{-1} + 1 = 2 - 2/e$. Avec $e \approx 2{,}71828$, on obtient environ $1{,}264$, soit au dixième $1{,}3$.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $s(1) = 2 - \dfrac{2}{e} \approx 1{,}3$.

Question 5.b. Sur le document-réponse à rendre avec la copie, compléter la courbe représentative de la fonction s.

Sur $[0;1[$, la courbe suit $2(1 - e^{-t})$ et atteint $s(1) = 2 - 2/e \approx 1{,}3$. Pour $t \geq 1$, elle décroît selon $(e-2)e^{-t} + 1$ et tend vers l'asymptote horizontale $s = 1$.

Courbe du signal de sortie s(t)



> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> La courbe passe de $(0;0)$ à $(1; 2 - 2/e)$, puis décroît vers $s = 1$.

Question 5.c. Donner la limite de s(t) lorsque t tend vers +∞.

Pour $t \geq 1$, $s(t) = (e-2)e^{-t} + 1$. Comme e^{-t} tend vers 0 lorsque t tend vers $+\infty$, le terme exponentiel disparaît à la limite.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $\lim_{t \to +\infty} s(t) = 1.$

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2022)

Bilan de l'épreuve : Cette épreuve de mathématiques du BTS, groupement B, session 2022, porte le code 22MATGRB2 et dure deux heures. Le coefficient est de 1,5 en microtechniques et de 2 en électrotechnique. Elle étudie le freinage d'un chariot et un système électrique entrée-sortie, en évaluant équations différentielles, analyse de fonctions, intégration et transformées de Laplace.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Pour y' + ay = b, la solution générale est la somme d'une solution particulière et des solutions de l'équation homogène associée.
- Si f(t) tend vers L lorsque t tend vers +∞, sa courbe admet l'asymptote horizontale d'équation y = L.
- La distance parcourue entre deux instants est l'intégrale de la vitesse sur l'intervalle correspondant.
- La transformée de Laplace de f(t - a)U(t - a) est $F(p)e^{-ap}$.

Points de vigilance & attentes du jury

- Appliquer la condition initiale après avoir établi la famille des solutions de l'équation différentielle.
- Pour conclure sur l'arrêt, vérifier si la vitesse atteint zéro, et pas seulement si elle décroît.
- Respecter les bornes de l'intégrale et donner l'arrondi demandé au centimètre.
- Pour un retard en Laplace, appliquer le facteur exponentiel et tenir compte de l'intervalle étudié.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment déterminer la solution d'une équation différentielle linéaire avec une constante au second membre ?

On résout d'abord l'équation homogène associée, puis on cherche une solution particulière. La solution générale est leur somme. Enfin, on utilise la condition initiale pour déterminer la constante.

Q : Comment utiliser le retard temporel dans une transformée de Laplace ?

La transformée de f(t - a)U(t - a) est $F(p)e^{-ap}$. Il faut repérer le retard a, appliquer ce facteur, puis utiliser les transformées usuelles pour retrouver l'expression temporelle.

Q : Comment organiser le temps dans cette épreuve de deux heures ?

Les deux exercices valent chacun 10 points, et les trois parties du premier peuvent être traitées indépendamment. Répartissez le temps entre les exercices et gardez quelques minutes pour vérifier les calculs, les unités et les réponses graphiques.

Q : Quels éléments soigner pour répondre aux attentes de notation ?

Présentez les étapes utiles, les notations et les unités, puis respectez les intervalles et arrondis demandés. Pour le QCM sur le développement limité, une seule réponse est attendue et aucune justification n'est demandée.

Sujet officiel associé (PDF) : https://btsmte.fr/assets/annales/bts-mte/E2 - Mathématiques/2022/BTS MTE - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 2-Sujet.pdf
Ressources BTS Motorisations Toutes Énergies : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.