Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

Mathématiques

Session 2022 • Code sujet : **22MATGRB1** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **2, sauf Traitement des matériaux : 3**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. **Freinage d’un chariot : équation différentielle, étude de fonction et étude locale** (12 questions) **Page 3**

2. **Probabilités, durée de vie de tubes fluorescents et intervalle de confiance** (9 questions) **Page 7**

3. **Ce qu’il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ)** (Synthèse & Q&A Examen) **Page 10**

Sujet officiel (PDF) : https://btsmte.fr/assets/annales/bts-mte/E2 - Mathématiques/2022/BTS MTE - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 1-Sujet.pdf

1. Freinage d’un chariot : équation différentielle, étude de fonction et étude locale

Un chariot de fête foraine lancé à 20 m·s⁻¹ est ralenti par un système de freinage, et sa vitesse f(t) est modélisée sur [0 ; +∞[. L’exercice mobilise une équation différentielle, l’étude de la fonction et de sa courbe, le calcul d’une distance parcourue, un développement limité et une tangente.

Partie A - Résolution d’une équation différentielle

Question 1.a. Résoudre l’équation différentielle homogène (E₀) : y' + 0,8y = 0.

L’équation est de la forme $y' + ay = 0$, dont les solutions sont $y(t) = ke^{-at}$, avec $k \in \mathbb{R}$. Ici, $a = 0,8$. On applique donc directement la formule fournie dans l’énoncé. Comme aucune condition initiale n’est imposée, la constante k reste arbitraire. Cette expression donne toutes les solutions sur l’intervalle considéré.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = ke^{-0,8t}$, avec $k \in \mathbb{R}$.

Question 1.b. La fonction g est définie sur [0 ; +∞[par g(t) = 5. Vérifier que g est une solution de l’équation différentielle (E) : y' + 0,8y = 4.

La fonction g est constante, donc $g'(t) = 0$. En remplaçant dans le membre de gauche de l’équation, on obtient $g'(t) + 0,8g(t) = 0 + 0,8 \times 5 = 4$. L’égalité est vérifiée pour tout $t \in [0; +\infty[$. Ainsi, la fonction proposée satisfait bien l’équation différentielle (E).

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Oui : $g(t) = 5$ est solution, car $g'(t) + 0,8g(t) = 4$.

Question 1.c. Déduire des questions précédentes l’ensemble des solutions de l’équation différentielle (E) : y' + 0,8y = 4.

La solution générale de l’équation non homogène s’obtient en ajoutant à une solution particulière toutes les solutions de l’équation homogène associée. La fonction constante $g(t) = 5$ est une solution particulière de (E), et les solutions de (E_0) sont $ke^{-0,8t}$. On additionne ces deux expressions pour obtenir l’ensemble des solutions.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = ke^{-0,8t} + 5$, avec $k \in \mathbb{R}$.

Question 2. Déterminer la solution f de l'équation différentielle (E) qui vérifie la condition initiale f(0) = 20.

La solution générale trouvée précédemment est $f(t) = ke^{-0,8t} + 5$. La condition $f(0) = 20$, avec $e^0 = 1$, donne $k + 5 = 20$, donc $k = 15$. En remplaçant la constante dans la solution générale, on obtient la fonction qui vérifie à la fois l'équation différentielle et la condition initiale.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$.

Partie B - Étude de la fonction f

Question 1.a. Pour f(t) = $15e^{-0,8t}$ + 5, démontrer que la limite de f(t) lorsque t tend vers +∞ est égale à 5.

Lorsque $t \to +\infty$, on a $-0,8t \to -\infty$, donc $e^{-0,8t} \to 0$. Par conséquent, $15e^{-0,8t} \to 0$. La limite de $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$ est alors la somme de la limite de ce terme et de la constante 5. Cela démontre la limite demandée.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 5$.

Question 1.b. Déduire de la limite précédente que la courbe C admet une asymptote, puis donner une équation de cette asymptote.

La limite de la fonction en $+\infty$ est finie et vaut 5. La courbe représentative admet donc une asymptote horizontale à droite. L'équation d'une asymptote horizontale est $y = L$, où L est la limite de la fonction. Ici, $L = 5$, ce qui donne directement l'équation demandée.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Asymptote horizontale en $+\infty$: $y = 5$.

Question 2. En utilisant f'(t) = $-12e^{-0,8t}$, dresser le tableau de variation de f sur [0 ; +∞[.

Pour tout $t \geq 0$, $e^{-0,8t} > 0$, donc $f'(t) = -12e^{-0,8t} < 0$. Ainsi, f est strictement décroissante sur $[0; +\infty[$. De plus, $f(0) = 20$, et la limite en $+\infty$ vaut 5. Le tableau de variation est donc :

t	**0**	$+\infty$
$f'(t)$		$-$
$f(t)$	20	$\searrow$ 5

✓ RÉPONSE À RETENIR

f décroît strictement de 20 vers 5 sur $[0; +\infty[$.

Question 3. Déterminer si le système de freinage permet au chariot de s'arrêter.

Le chariot s'arrête si sa vitesse atteint 0. Or, pour tout temps fini, $e^{-0,8t} > 0$, donc $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5 > 5$. La vitesse décroît et tend vers 5 m·s⁻¹, mais ne devient jamais nulle. Selon ce modèle, le système de freinage ne permet donc pas au chariot de s'arrêter.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Non : la vitesse reste supérieure à 5 m·s⁻¹ et n'atteint jamais 0.

Question 4.a. La fonction F est définie sur [0 ; +∞[par F(t) = −18,75e$^{-0,8t}$ + 5t. Vérifier que F est une primitive de f sur cet intervalle.

On dérive $F(t) = -18,75e^{-0,8t} + 5t$. La dérivée du premier terme est $(-18,75)(-0,8)e^{-0,8t}$, et celle de $5t$ est 5. Le produit des coefficients vaut 15, d'où $F'(t) = 15e^{-0,8t} + 5$. Cette expression est précisément $f(t)$: F est donc une primitive de f.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$F'(t) = 15e^{-0,8t} + 5 = f(t)$: F est une primitive de f.

Question 4.b. La distance d parcourue entre les instants t_0 et t_1 est donnée par $d = \int_{t_0}^{t_1} f(t)dt$. Calculer la valeur exacte de la distance parcourue entre $t_0 = 0$ et $t_1 = 1$, puis donner une valeur arrondie au centimètre.

La distance vaut $F(1) - F(0)$. Or $F(1) = -18,75e^{-0,8} + 5$ et $F(0) = -18,75$, donc $d = 23,75 - 18,75e^{-0,8}$ m. Numériquement, cette distance vaut environ 15,3251 m. L'arrondi au centimètre est donc 15,33 m.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$d = 23,75 - 18,75e^{-0,8}$ m, soit $15,33$ m au centimètre près.

Partie C - Étude locale

Question 1. Parmi les propositions données, recopier l'unique développement limité à l'ordre 2 de f au voisinage de zéro. Une seule réponse est exacte et aucune justification n'est demandée.

Le développement limité à l'ordre 2 donné par le logiciel est $20 - 12t + \frac{24}{5}t^2$. Le reste doit être négligeable devant t^2, donc s'écrire sous la forme $t^2\varepsilon(t)$, avec $\varepsilon(t) \to 0$ lorsque $t \to 0$. Parmi les propositions de l'énoncé, seule la troisième respecte ces deux conditions. Aucune justification n'est requise sur la copie.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Recopier la troisième proposition : $20 - 12t + \frac{24}{5}t^2 + t^2\varepsilon(t)$, avec $\varepsilon(t) \to 0$.

Question 2. Donner une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0.

La tangente au point d'abscisse 0 a pour équation $y = f(0) + f'(0)t$. On a $f(0) = 15 + 5 = 20$, et la dérivée donnée dans l'énoncé vérifie $f'(0) = -12e^0 = -12$. En substituant ces valeurs dans la formule de la tangente, on obtient l'équation demandée.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $T : y = 20 - 12t$.

2. Probabilités, durée de vie de tubes fluorescents et intervalle de confiance

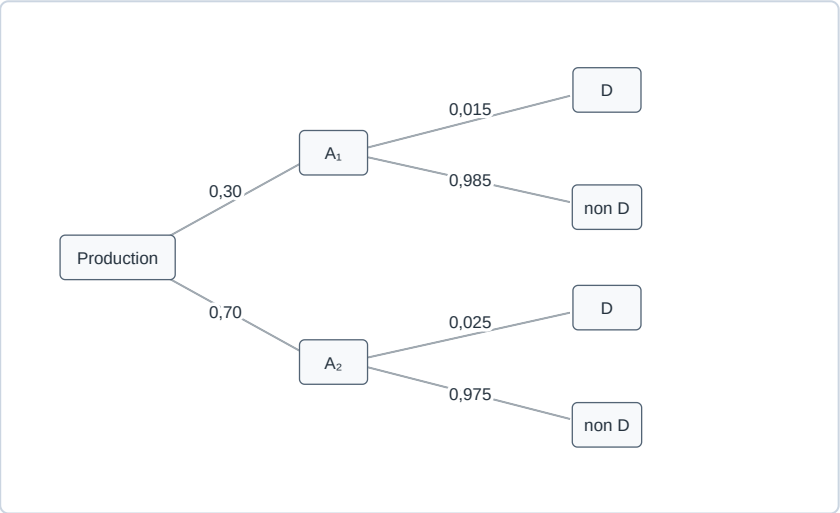
Une usine produit des tubes fluorescents dans deux ateliers, avec des taux de défaut différents, et l'on étudie les probabilités liées à leur origine et à leur conformité. L'exercice examine aussi la durée de fonctionnement des tubes selon une loi exponentielle, puis estime la proportion de rivets conformes à partir d'un échantillon de 1 000 rivets.

Partie A - Probabilités conditionnelles

Question 1. Réaliser un arbre pondéré décrivant la production des deux ateliers et les probabilités qu'un tube présente un défaut selon son atelier d'origine.

La première étape distingue les ateliers selon leurs parts de production. À partir de chaque atelier, les deux branches indiquent la présence ou l'absence d'un défaut. Les probabilités conditionnelles sont celles données pour chaque atelier ; les probabilités des branches issues d'un même atelier ont pour somme 1.

Arbre pondéré des ateliers et des défauts



Les probabilités des deux branches issues de chaque atelier ont pour somme 1.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Arbre : $P(A_1) = 0,30$, $P(A_2) = 0,70$; $P_{A_1}(D) = 0,015$, $P_{A_1}(\overline{D}) = 0,985$; $P_{A_2}(D) = 0,025$, $P_{A_2}(\overline{D}) = 0,975$.

Question 2. Calculer la probabilité P(A₁ ∩ D), où A₁ désigne l'événement « le tube provient de l'atelier 1 » et D l'événement « le tube présente un défaut ».

On utilise la règle du produit pour une intersection : la probabilité de venir de l'atelier 1 et de présenter un défaut est égale à la probabilité de venir de cet atelier, multipliée par la probabilité conditionnelle d'un défaut dans cet atelier. Ainsi, $P(A_1 \cap D) = P(A_1) \times P_{A_1}(D) = 0,30 \times 0,015 = 0,0045$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$P(A_1 \cap D) = 0,0045$, soit $0,45\,\%$.

Question 3. **Montrer que la probabilité qu'un tube choisi au hasard dans la production présente un défaut est égale à 0,022.**

Les événements A_1 et A_2 forment une partition de la production. La formule des probabilités totales donne donc la somme des probabilités de défaut de chaque atelier, pondérées par leurs parts de production : $P(D) = 0,30 \times 0,015 + 0,70 \times 0,025 = 0,022$.

La probabilité totale est bien celle demandée.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(D) = 0,022$, soit $2,2\,\%$.

Question 4. **Sachant qu'un tube choisi au hasard ne présente pas de défaut, déterminer la probabilité qu'il provienne de l'atelier 2.**

On cherche la probabilité conditionnelle $P(A_2 \mid \overline{D})$. La probabilité d'obtenir un tube sans défaut issu de l'atelier 2 vaut $0,70 \times 0,975 = 0,6825$. Pour l'ensemble de la production, $P(\overline{D}) = 1 - 0,022 = 0,978$. On divise alors la probabilité de l'intersection par celle de l'absence de défaut : $P(A_2 \mid \overline{D}) = 0,6825/0,978$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(A_2 \mid \overline{D}) \approx 0,698$, soit $69,8\,\%$.

Partie B - Durée de vie des tubes fluorescents

Question 1. **La durée de bon fonctionnement T, exprimée en heures, suit une loi exponentielle de paramètre λ = 0,001. Déterminer son espérance E(T) et interpréter le résultat dans le contexte.**

La page 7 du sujet indique $\lambda = 0,0001$ et rappelle que l'espérance d'une loi exponentielle est $E(T) = 1/\lambda$. On obtient donc $E(T) = 1/0,0001 = 10\,000$ heures. Cette valeur représente la durée moyenne de bon fonctionnement des tubes ; elle ne garantit pas que chaque tube fonctionnera exactement aussi longtemps.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $E(T) = 10\,000$ heures : durée moyenne de bon fonctionnement.

Question 2. **Calculer, en arrondissant au centième, la probabilité qu'un tube fluorescent prélevé fonctionne moins de 8 000 heures.**

Le sujet donne $P(T \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$, avec $\lambda = 0,0001$. La durée suit une loi continue, donc $P(T < 8\,000) = P(T \leq 8\,000)$. Ainsi, $P(T < 8\,000) = 1 - e^{-0,0001 \times 8\,000} \approx 0,5507$. L'arrondi au centième donne la probabilité demandée.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$P(T < 8\,000) \approx 0,55$, soit $55\,\%$.

Question 3. Calculer, en arrondissant au centième, la probabilité qu'un tube fluorescent prélevé fonctionne plus de 10 000 heures.

La formule de la loi exponentielle donne la probabilité de dépassement : $P(T > t) = e^{-\lambda t}$. Avec le paramètre du sujet $\lambda = 0,0001$, on obtient $P(T > 10\,000) = e^{-0,0001 \times 10\,000} = e^{-1} \approx 0,3679$. L'arrondi au centième fournit la réponse.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$P(T > 10\,000) \approx 0,37$, soit $37\,\%$.

Partie C - Intervalle de confiance

Question 1. Parmi les 1 000 rivets prélevés, 975 sont conformes. Donner une estimation ponctuelle de la proportion inconnue p de rivets conformes dans l'ensemble de la production.

Donnée de l'échantillon	Calcul	Fréquence observée
975 rivets conformes sur 1 000	$975/1\,000$	$0,975$

L'estimation ponctuelle de la proportion inconnue est la fréquence observée dans l'échantillon.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$\hat{p} = f = 0,975$, soit $97,5\,\%$.

Question 2. Déterminer, à partir de la fréquence observée, un intervalle de confiance de la proportion p de rivets conformes au niveau de confiance de 95 %. Arrondir les bornes à 10^{-3} près.

Le sujet donne l'intervalle centré sur la fréquence f : $[f - 1,96\sqrt{f(1-f)/n}\,;\ f + 1,96\sqrt{f(1-f)/n}]$. Avec $f = 0,975$ et $n = 1\,000$, la marge vaut environ $0,009677$. Les bornes non arrondies sont donc $0,965323$ et $0,984677$. Arrondies au millième, elles donnent l'intervalle de confiance demandé.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Intervalle de confiance à 95 % : $[0,965\ ;\ 0,985]$.

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2022)

Bilan de l'épreuve : L'épreuve de mathématiques du BTS, session 2022, porte le code 22MATGRB1 et dure 2 heures. Le coefficient est 2, sauf pour la spécialité Traitement des matériaux où il est 3. Les deux exercices portent sur le freinage d'un chariot, des tubes fluorescents et des rivets. Les compétences évaluées couvrent équations différentielles, fonctions, intégrales, probabilités et estimation statistique.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Pour $y' + ay = b$, on additionne une solution particulière aux solutions de l'équation homogène.
- Une limite finie L de f(t) lorsque t tend vers $+\infty$ donne une asymptote horizontale d'équation $y = L$.
- Pour une loi exponentielle de paramètre λ, $E(T) = 1/\lambda$ et $P(T \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$.
- Pour une proportion, l'intervalle à 95 % fourni est $f \pm 1{,}96\sqrt{f(1-f)/n}$, où f est la fréquence observée.

Points de vigilance & attentes du jury

- Appliquer la condition initiale $f(0) = 20$ pour déterminer la constante de la solution différentielle.
- Pour conclure sur l'arrêt du chariot, interpréter la limite de sa vitesse et non sa seule décroissance.
- Dans l'arbre, distinguer la part de production de chaque atelier des probabilités conditionnelles de défaut.
- Respecter les unités, les arrondis demandés et les événements conditionnant dans les calculs de probabilités.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment trouver la solution de l'équation différentielle du chariot ?

Résoudre d'abord l'équation homogène $y' + 0{,}8y = 0$, puis ajouter une solution particulière de l'équation complète. La condition initiale $f(0) = 20$ permet ensuite de déterminer la constante.

Q : Comment calculer la probabilité qu'un tube sans défaut provienne de l'atelier 2 ?

Calculer d'abord $P(A_2 \cap \text{non D}) = P(A_2) \times P(\text{non D} \mid A_2)$, puis diviser cette probabilité par P(non D). Le quotient obtenu est la probabilité conditionnelle demandée.

Q : Comment organiser le temps pour cette épreuve de deux heures ?

Répartir le temps entre les deux exercices et garder une marge pour vérifier les résultats. Les parties de chaque exercice sont indépendantes : en cas de blocage, passer à la question suivante puis revenir.

Q : Quelles précautions prendre pour présenter les réponses et obtenir les points ?

Nommer les événements, indiquer les formules utilisées et présenter les étapes de calcul utiles. Donner une valeur exacte lorsqu'elle est demandée, puis appliquer l'arrondi et l'unité précisés dans l'énoncé.

Sujet officiel associé (PDF) : https://btsmte.fr/assets/annales/bts-mte/E2 - Mathématiques/2022/BTS MTE - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 1-Sujet.pdf

Ressources BTS Motorisations Toutes Énergies : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.